www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Institut National Polytechnique de Lorraine

Session 1990

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE
APPLIQUEE ET DE PROSPECTION MINIERE

Epreuve de Mathématiques

Les candidats sont invités à soigner l'écriture, la présentation et la rédaction. Aucun résultat non clairement justifié ne sera pris en compte. A condition de signaler explicitement qu'on n'a pu le démontrer on peut utiliser un réultat du texte, pour traiter la suite.

Partie I

Soit E_n l'ensemble constitué des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et du polynôme 0.

On pose: $e_o(x) = 1$, et si $1 \leq k \leq n$, $e_k(x) = x^k$.

On rappelle que E_n est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que $(e_o,...,e_n)$ est une base de cet espace.

1) On pose: $f_o(x) = 1$, $f_1(x) = x$, et si $2 \leq k \leq n$

$$f_k(x) = x(x-1)....(x-k+1) .$$

a) Exprimer f_2, f_3, f_4 en fonction de e_1, e_2, e_3, e_4 .

b) Montrer que $(f_o, f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E_4 , et exprimer les polynômes e_o, e_1, e_2, e_3, e_4 dans cette base.

c) Montrer que, de manière générale, $(f_o,f_1,...,f_n)$ est une base de E_n .

On note S(n,k) les coefficients de la décomposition de e_n dans cette base:

(1) $$e_n = S(n,0)f_o + S(n,1)f_1 + ... + S(n,n)f_n .$$

d) Calculer $e_n(0)$, $e_n(1)$, $e_n(2)$. En déduire la valeur des nombres S(n,0) $(n\geq 0)$, S(n,1) $(n\geq 1)$, S(n,2) $(n\geq 2)$.
Déterminer également le nombre S(n,n).

2) a) Vérifier que , pour tout x réel et tout entier $k \geq 0$, on a

(2) $$x.f_k(x) = f_{k+1}(x) + k.f_k(x).$$

b) En calculant $x.e_n(x)$ de deux manières différentes, montrer que, si $n \geq 1$, et $1 \leq k \leq n$

(3) $$S(n+1,k) = k.S(n,k) + S(n,k-1) .$$

3) Former le tableau des nombres S(n,k) pour $1 \leq k \leq n$, $1 \leq n \leq 6$.

4) Soit, la propriété (H_n) suivante:

Si $0 \leq p \leq n$: $0 \leq S(n,p) \leq 2^{n-1}.p^n$.

Montrer par récurrence sur n en utilisant (3) que (H_n) est vraie, pour tout $n \geq 1$.

Partie II

Soit p un entier supérieur ou égal à 1.

1) On pose $g_p(x) = e^{-x}.(1-e^{-x})^p$, pour tout réel x.

Trouver une primitive de la fonction g_p.

2) Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y' - (p+1)y = \frac{1}{p!}(e^x-1)^p$$

qui vérifie la condition: $y(0) = 0$.

Partie III

Si p est un entier supérieur ou égal à 1, on considère la série entière

$$h_p(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{S(n,p)}{n!} x^n .$$

1) En utilisant I 4, montrer que cette série converge pour tout x réel.

2) Que vaut $h_1(x)$?

3) Montrer, en utilisant (3), que si $p \geq 1$ et si x est réel

(4) $$h'_{p+1}(x) = (p+1)h_{p+1}(x) + h_p(x) .$$

4) En déduire par récurrence en utilisant II que pour tout x réel et tout $p \geq 1$

(5) $$h_p(x) = \frac{1}{p!} (e^x-1)^p .$$

5) Etudier et représenter graphiquement h_1, h_2 et h_3.

6) a) En développant $(e^x-1)^p$ par la formule du binôme de Newton, et en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, montrer que, si $n \geq 1$ et $1 \leq p \leq n$,

(6) $$S(n,p) = \frac{1}{p!} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k k^n .$$

b) En déduire que lorsque n tend vers l'infini, p étant fixé

(7) $$S(n,p) \sim p^n/p! .$$

T.S.V.P.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE de GEOLOGIE de NANCY

7) On considère la série entière

$$S_p(x) = \sum_{n=p}^{\infty} S(n,p)\, x^n.$$

a) Quel est le rayon de convergence de cette série ?

b) Que vaut $S_1(x)$?

c) Montrer que, si $p \geq 1$ et $|x| < 1/p$

(8) $$S_p(x) = p.x.S_p(x) + x.S_{p-1}(x).$$

En déduire la valeur de $S_p(x)$.

8) En effectuant le produit des séries $1/(1-x)$ et $1/(1-2x)$, retrouver la valeur de $S(n,2)$.

Partie IV

1) Soit X une variable aléatoire entière positive, possèdant une espérance notée E(X), et une variance notée Var(X). On pose pour tout entier k positif

et l'on suppose $\begin{cases} p_k = P(X=k) \\ p_0 \neq 1 \end{cases}$.

On pose également si $k > 0$: $q_k = P(X=k \ / X>0)$ (probabilité pour que $X=k$, sachant que X est strictement positive).

a) Vérifier que $(k,q_k)_{k\geq 1}$ constitue la distribution de probabilité d'une variable aléatoire Y.

b) Calculer E(Y) et Var(Y) en fonction de E(X), Var(X) et p_0 .

c) Exprimer la fonction génératrice de Y en fonction de celle de X et de p_0.

2) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ .
a) Ecrire la distribution de probabilité de Y.
b) Calculer E(Y), Var(Y).
c) Quelle est la fonction génératrice de Y ?

3) On considère la somme Y_p de p variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que la variable Y de la question 2).

a) Calculer $E(Y_p)$ et $Var(Y_p)$.

b) Exprimer la fonction génératrice de Y_p en fonction de h_p .

c) En déduire la distribution de probabilité de Y_p en fonction des $S(n,p)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail